

Е. Д. Деревянчук, А. С. Шутков

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УРОВНЯ ГЛЮКОЗЫ В ЖИДКОСТИ ВОЛНОВОДНЫМ МЕТОДОМ¹

Аннотация.

Актуальность и цели. В данной работе рассматривается обратная задача определения уровня глюкозы в жидкости волноводным методом. Данная задача связана с одним из распространенных заболеваний – сахарным диабетом, которое характеризуется высоким содержанием глюкозы в крови. Человеку, страдающему сахарным диабетом, необходимо введение инсулина ежедневно. Доза вводимого инсулина зависит от уровня глюкозы в крови. Определение концентрации глюкозы в крови осуществляют, как правило, инвазивно, при этом необходимо прокалывать палец. Такое прокалывание необходимо проводить несколько раз в день. По этой причине в настоящее время разрабатываются неинвазивные методы определения концентрации глюкозы в крови. Цель данного исследования состоит в разработке математической модели для определения уровня глюкозы в жидкости с помощью волноводного метода.

Материалы и методы. Постановка задачи сводится к решению обратной задачи электродинамики; предложен метод решения поставленной задачи на основе общих методов теории краевых задач, а также теории приближенных методов решения нелинейных систем уравнений.

Результаты. Получены численные результаты решения тестовых задач, а также серия экспериментов.

Выводы. Получены численные результаты решения обратной задачи в случае изотропной односекционной диафрагмы для комплексной диэлектрической проницаемости. Проведена серия экспериментов, подтверждающая зависимость коэффициента ослабления от уровня глюкозы в жидкости.

Ключевые слова: неинвазивный метод, уровень глюкозы, диэлектрическая проницаемость, магнитная проницаемость.

Е. Д. Derevyanchuk, A. S. Shutkov

MATHEMATICAL SIMULATION OF GLUCOSE LEVEL DETERMINATION IN LIQUID BY THE WAVEGUIDE METHOD

Abstract.

Background. The present work considers an inverse problem of glucose level determination in liquid by the waveguide method. The given problem relates to one of widespread diseases – diabetes mellitus, which is characterized by a high content of glucose in blood. People with diabetes mellitus need insulin injections every day. The insulin dose depends on the glucose level in blood. Glucose concentration in blood is determined, as a rule, invasively through needling a finger. Such needling should be done several times a day. For that reason, nowadays, there are being de-

¹ Работа выполнена частично при финансовой поддержке Фонда содействия инновациям по программе «УМНИК» и Российского фонда фундаментальных исследований проект № 16-31-00344 (грант мол_a).

veloped noninvasive methods of determining glucose concentration in blood. The aim of the present research is to develop a mathematical model for glucose level determination in liquid through the waveguide method.

Materials and methods. Task setting is reduced to the inverse problem of electrodynamics; the authors have suggested a method to solve the set problem on the basis of general methods of the boundary problem theory, as well as the theory of approximate methods of solving nonlinear equation systems.

Results. The authors obtained numerical results of solving test problems, as well as a series of experiments.

Conclusions. The researchers obtained numerical results of solving the inverse problem in the case of isotropic single-sectional diaphragm for complex dielectric permeability. The authors completed a series of experiments, proving a dependence of the attenuation coefficient on a glucose level in liquid.

Key words: noninvasive method, glucose level, permittivity, permeability tensor.

Введение

Сахарный диабет – одно из распространенных заболеваний в мире. Людей, страдающих таким заболеванием, насчитывается более 50 млн человек, и ежегодно их число возрастает на 7–10 %. Сахарный диабет – это заболевание, характеризующееся высоким содержанием глюкозы в крови. Человеку, страдающему сахарным диабетом, необходимо введение инсулина. Доза вводимого инсулина зависит от уровня глюкозы в крови. Определение концентрации глюкозы в крови осуществляют различными методами, как правило, инвазивно, т.е. для определения уровня глюкозы человеку необходимо прокалывать палец для забора крови. Такое прокалывание необходимо проводить несколько раз в день. По этой причине в настоящее время разрабатываются неинвазивные методы определения концентрации глюкозы в крови.

В данной статье рассматривается применение волноводного метода для определения уровня глюкозы в жидкости.

Цель данного исследования – разработка математической модели определения уровня глюкозы с использованием волноводного метода.

Данная работа состоит из трех частей: в первой части изложена постановка задачи; во второй части представлен метод решения поставленной задачи; в третьей приведены численные результаты, полученные в ходе математического моделирования и эксперимента.

1. Постановка задачи

Рассмотрим волновод

$$P = \{(x, y, z) : 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b, -\infty < x_3 < \infty\}$$

с идеально проводящими стенками ∂P , расположенный в декартовой системе координат $Oxyz$. В волновод помещена односекционная диафрагма Q (рис. 1), которая заполнена изотропной средой, характеризующейся магнитной проницаемостью μ_1 и диэлектрической проницаемостью ϵ_1 :

$$Q = \{(x, y, z) : 0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < l\}.$$

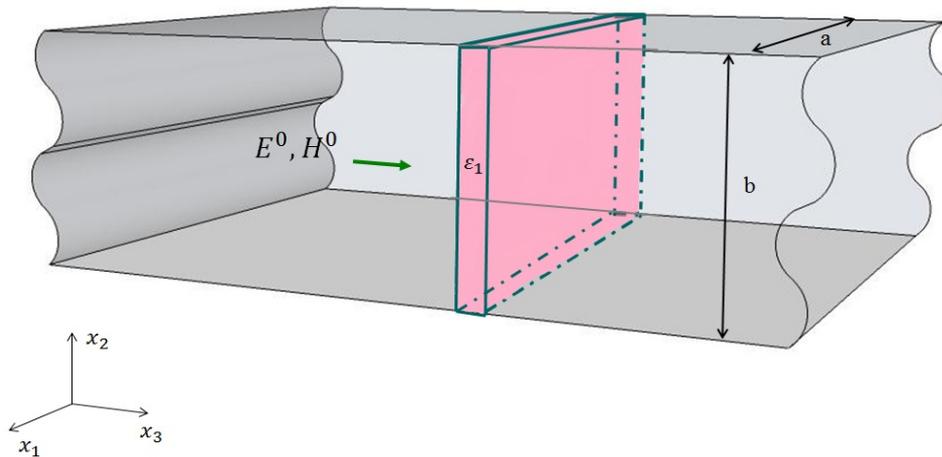


Рис. 1. Диафрагма Q в волноводе P

В $P \setminus \bar{Q}$ среда изотропна и однородна с проницаемостями $\epsilon_0 > 0$, $\mu_0 > 0$ $k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$, k_0 – волновое число, $\omega > 0$ – круговая частота.

Электромагнитное поле \mathbf{E} , \mathbf{H} внутри волновода удовлетворяет уравнениям Максвелла:

вне диафрагмы

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{H} = -i\omega\epsilon_0 \mathbf{E}, \\ \text{rot } \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H}; \end{cases} \quad (1)$$

и внутри диафрагмы:

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{H} = -i\omega\epsilon_1 \mathbf{E}, \\ \text{rot } \mathbf{E} = i\omega\mu_1 \mathbf{H}, \end{cases} \quad (2)$$

где \mathbf{E} – вектор напряженности электрического поля; \mathbf{H} – вектор напряженности магнитного поля; $\omega > 0$ – круговая частота.

Предполагается, что волновое число k_0 удовлетворяет условию: $\pi/a < k_0 < \pi/b$, т.е. волновод работает в одномодовом режиме [1–3]; при этом высшие моды экспоненциально затухают.

Будем использовать систему СГС. Тогда круговая частота ω измеряется в ГГц = 10^9 [с⁻¹]. Ниже представлены выражения, которые связывают между собой круговую частоту ω , линейную частоту f и волновое число k_0 :

$$\omega = 2\pi f, \quad k_0 = \frac{2\pi f}{c_c},$$

где $c_c = 2.9998 \cdot 10^{10}$ [см · с⁻¹] = $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ – скорость света в вакууме.

Будем предполагать, что внешнее электрическое поле имеет вид

$$\mathbf{E}^0 = A \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-i\gamma_0 z} \mathbf{e}_2,$$

что соответствует волне типа H_{10} с известной амплитудой A , где $\gamma_0 = \gamma_0(\omega) \neq 0$, γ_0 – постоянная распространения волны H_{10} ; \mathbf{e}_2 – орт вдоль оси Oy . Вектор \mathbf{H}^0 определяется из второго уравнения системы (1). В прямоугольном волноводе основной волной является волна H_{10} , которая имеет поляризацию [1]:

$$\mathbf{E} = (0, E_y, 0), \quad \mathbf{H} = (H_x, 0, H_z). \quad (3)$$

Тогда поле \mathbf{E} вне диафрагмы Q имеет вид

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) (Ae^{-i\gamma_0 z} + Be^{i\gamma_0 z}) \mathbf{e}_2, & z < 0, \\ \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) Fe^{-i\gamma_0 z} \mathbf{e}_2, & z > l, \end{cases} \quad (4)$$

а внутри диафрагмы Q :

$$\mathbf{E}_j = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) (C_1 e^{-i\gamma_1 z} + D_1 e^{i\gamma_1 z}) \mathbf{e}_2, \quad (5)$$

где C_1 и D_1 – константы, которые определяются на рис. 2, где A – амплитуда падающей волны; B/A и F/A – коэффициенты отражения и прохождения, подлежащие измерению.

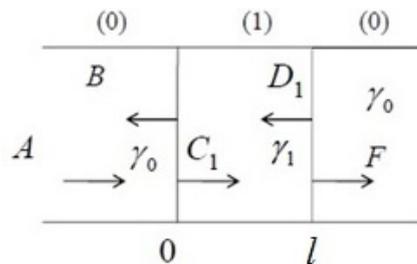


Рис. 2. Схема распространения электромагнитной волны в волноводе

На границах областей должны выполняться условия:

$$[E_y]_L = 0, \quad [H_x]_L = 0. \quad (6)$$

Подставим (3) в уравнения Максвелла (2). Откуда получаем

$$\gamma_1 = \sqrt{\omega^2 \epsilon_1 \mu_1 - \frac{\pi^2}{a^2}}. \quad (7)$$

Из уравнений Максвелла (1) с учетом того, что ϵ_0, μ_0 – скалярные величины, получаем выражение для γ_0 :

$$\gamma_0 = \sqrt{\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 - \frac{\pi^2}{a^2}} = \sqrt{k_0^2 - \frac{\pi^2}{a^2}}. \quad (8)$$

Граничные условия для вектора \mathbf{H} можно записать в следующем виде:

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} E_y \right]_L = 0. \quad (9)$$

Подставляя выражения (4), (5) в граничные условия (6), (9), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} A + B = C_1 + D_1, \\ \gamma_0(B - A) = \gamma_1(D_1 - C_1), \\ C_1 e^{-i\gamma_1 l} + D_1 e^{i\gamma_1 l} = F e^{-i\gamma_0 l}, \\ -\gamma_1(C_1 e^{-i\gamma_1 l} - D_1 e^{i\gamma_1 l}) = -\gamma_0 F e^{-i\gamma_0 l}. \end{cases} \quad (10)$$

Система уравнений (10) относительно неизвестных B, C_1, D_1 представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, которую можно решить любым известным методом решения систем линейных алгебраических уравнений.

Постановка обратной задачи P_ϵ^C : требуется по известному коэффициенту прохождения F/A электромагнитного поля определить **комплексную** диэлектрическую проницаемость ϵ **изотропной** односекционной диафрагмы.

2. Метод решения поставленной задачи

В предыдущих работах [4, 5] было получено рекуррентное соотношение зависимости коэффициента прохождения от постоянной распространения, которое имеет следующий вид:

$$\frac{F}{A} = \frac{e^{i\gamma_0 l_1}}{g(\tau)}, \quad (11)$$

$$g(\tau) = \cos \tau + i \left(\frac{\tau}{2\gamma_0 l_1} + \frac{\gamma_0 l_1}{2\tau} \right) \sin \tau, \quad (12)$$

$$\tau = \gamma_1 l_1 = l_1 \sqrt{\omega^2 \epsilon_1 \mu_0 - \frac{\pi^2}{a^2}}. \quad (13)$$

С учетом одномодового режима и того, что $\epsilon_1 > \epsilon_0 > 0$, имеем $k_1^2 > k_0^2 > \left(\frac{\pi}{a}\right)^2$, где $k_1^2 = \omega^2 \epsilon_1 \mu_0$. Откуда следует, что $\gamma_1 > 0$ и $\tau > 0$.

Будем предполагать, что магнитная проницаемость диафрагмы и магнитная проницаемость вне диафрагмы совпадают, т.е. $\mu_0 = \mu_1$. Решая уравнение (11) численным методом решения нелинейных уравнений относительно неизвестного τ , находим τ . Выражая ϵ_1 из формулы (12), получим

$$\epsilon_1 = \left(\frac{\tau^2}{l_1^2} + \frac{\pi^2}{a^2} \right) \frac{1}{\omega^2 \mu_0}. \quad (14)$$

Таким образом, решение обратной задачи $P_{\epsilon_1}^C$ в случае комплексного ϵ_1 сводится к решению соответствующего нелинейного уравнения.

3. Численные результаты

В табл. 1 представлены численные результаты решения обратной задачи восстановления комплексной диэлектрической проницаемости для изотропной односекционной диафрагмы. Параметры волновода: ширина $a = 2.3$ см, ширина $b = 1$ см, длина секции $l = 1$ см. В первом столбце представлено значение частоты f ; во втором – круговой частоты ω ; в третьем – значение коэффициента прохождения F/A , полученного при решении прямой задачи; в четвертом столбце – точные значения диэлектрической проницаемости суспензий эритроцитов пациентов с сахарным диабетом 2 типа (в первой и второй строке значения до прохождения курса лечения, в третьей и четвертой – после) [6]; в последнем столбце вычисленные значения диэлектрической проницаемости по формуле (14).

Таблица 1

Частота, ГГц	Круговая частота	Коэффициент прохождения $\times 10^{-3}$	Значения из [6]	Вычисленные значения
11.3	2.368	$5.165 + 3.826i$	$35.6 + 24.8i$	$35.599 + 24.301i$
11.2	2.347	$7.46 + 0.503i$	$33.6 + 23.2i$	$33.599 + 23.202i$
10.2	2.138	$1.206 - 7.027i$	$33.5 + 25.4i$	$33.5002 + 25.399i$
9.9	2.07	$5.523 - 7.46i$	$31.8 + 24.4i$	$31.9 + 24.094i$

Сравнивая последние два столбца, можно заметить, что погрешность вычислений не превосходит 2 %, что говорит об эффективности применяемого метода.

Результаты эксперимента

Для исследования зависимости электрофизических параметров растворов глюкозы от ее концентрации была проведена серия экспериментов. Измерения проводились на панорамном измерителе КСВН и ослабления P2-61 (рис. 3, 4). Получены значения модуля коэффициента ослабления $|\alpha|$, дБ [7] для водных растворов глюкозы различной концентрации. Измерения проводились в диапазоне частот от 9 до 11 ГГц с шагом в 0.2 ГГц. Результаты представлены в табл. 2–4 и графиках (рис. 5–8).

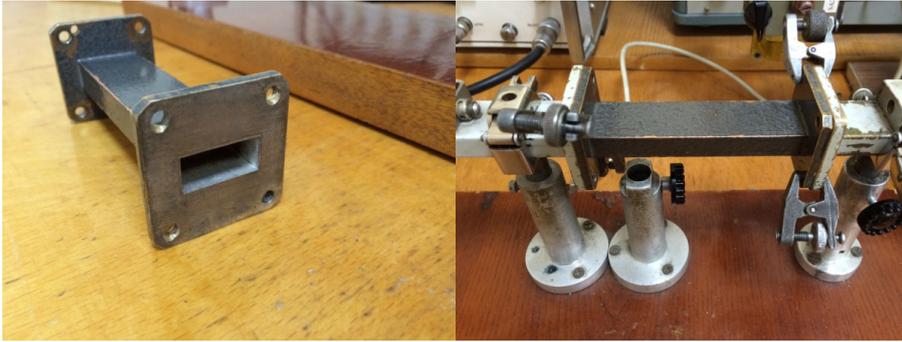


Рис. 3. Волноводная секция



Рис. 4. Панорамный измеритель КСВН и ослабления P2-61

Таблица 2

Частота, ГГц	Вода	Раствор 1	Раствор 2
9.0	10.75	10.9	14.55
9.2	10.8	11.0	14.5
9.4	10.9	11.6	14.75
9.6	11.1	12.2	14.9
9.8	11.25	12.9	15.1
10.0	11.4	13.6	15.3
10.2	11.6	14.6	15.75
10.4	11.8	15.4	16.1
10.6	12.0	16.1	16.4
10.8	12.4	17.1	16.9
11.0	12.7	17.8	17.4

В волноводную секцию (рис. 4) помещалась плотно прилегающая к стенкам губка из полимеров в форме параллелепипеда длиной 1 см, которая пропитывалась различными растворами.

Проведенную серию экспериментов можно разделить на три части. Ниже представлено описание используемых обозначений в каждой части.

1. В табл. 2 и на рис. 5: раствор 1 – 10 % раствор сахара, красная линия 1; раствор 2 – 20 % раствор сахара, синяя линия 2; вода – питьевая вода, черная линия 3.

Таблица 3

Частота, ГГц	Вода	Раствор 1	Раствор 2
9.0	10.75	12.87	16.28
9.2	10.8	12.9	16.53
9.4	10.9	13.3	17.1
9.6	11.1	13.7	17.73
9.8	11.25	14.1	18.27
10.0	11.4	14.53	18.82
10.2	11.6	15.03	19.47
10.4	11.8	15.6	20.3
10.6	12.0	15.97	20.77
10.8	12.4	16.53	21.57
11.0	12.7	16.93	22.27

Таблица 4

Частота, ГГц	1	2	3	4	5	6
9.0	7.2	5.9	4.7	15.7	15.33	13.88
9.2	7.28	5.93	4.73	15.81	15.4	13.97
9.4	7.51	6.12	4.83	16.41	15.9	14.5
9.6	7.77	6.28	4.9	16.99	16.37	15.07
9.8	8.06	6.4	5.02	17.49	16.9	15.62
10.0	8.3	6.62	5.18	18	17.47	16.3
10.2	8.53	6.73	5.3	18.38	17.93	16.9
10.4	8.8	7.07	5.43	18.78	18.47	17.4
10.6	8.96	7.17	5.6	19.03	18.83	18.03
10.8	9.14	7.4	5.8	19.38	19.3	18.73
11.0	9.32	7.63	6.03	19.7	19.83	19.3

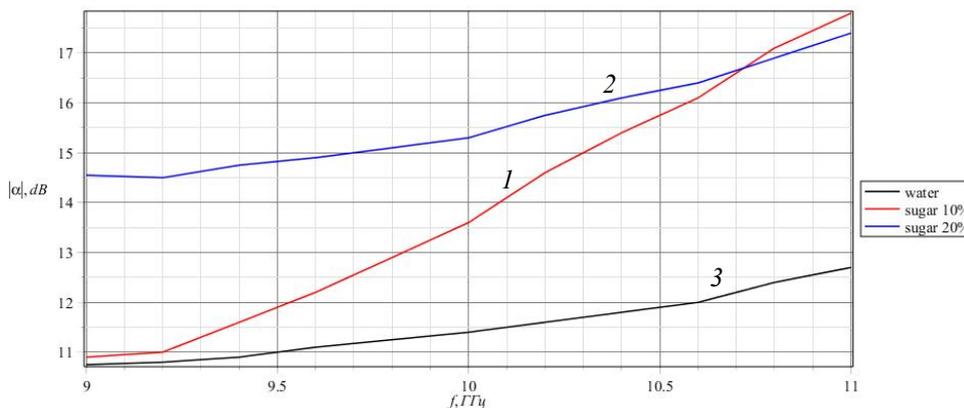


Рис. 5. Питьевая вода, 10 % раствор сахара, 20 % раствор сахара

2. В табл. 3 и на рис. 6: вода – дистиллированная вода; раствор 1 – уровень глюкозы 5.5 ммоль/л, красные линии 1; раствор 2 – уровень глюкозы 11 ммоль/л, синие линии 2. Пунктирные линии – средние значения (представленные в таблице), сплошные линии – результаты различных измерений.

3. В табл. 4 и на рис. 7: 1 – дистиллированная вода, 0.5 мл, зеленая пунктирная линия 1; 2 – уровень глюкозы 5.5 ммоль/л, 0.5 мл, красная пунк-

тирная линия 2; 3 – уровень глюкозы 8.25 ммоль/л, 0.5 мл, синяя пунктирная линия 3; 4 – дистиллированная вода, 1 мл, зеленая сплошная линия 4; 5 – уровень глюкозы 5.5 ммоль/л, 1 мл, красная сплошная линия 5; 6 – уровень глюкозы 8.25 ммоль/л, 1 мл, синяя сплошная линия 6.

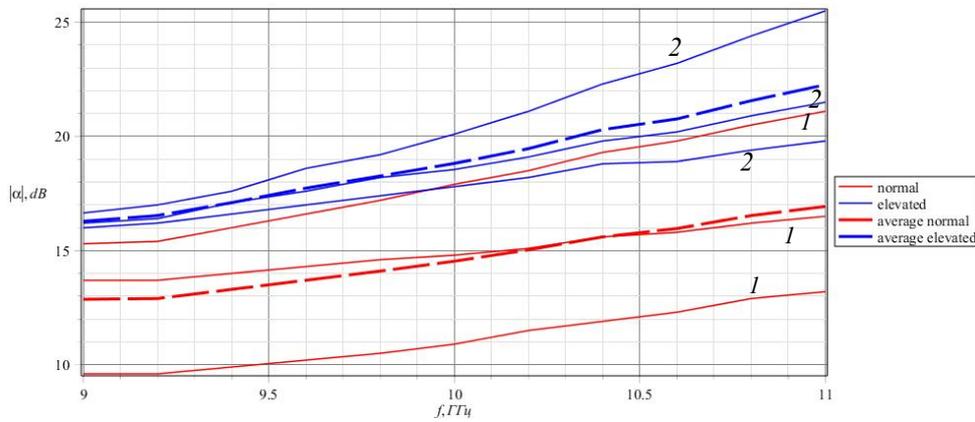


Рис. 6. Уровень глюкозы 5.5 ммоль/л, уровень глюкозы 11 ммоль/л

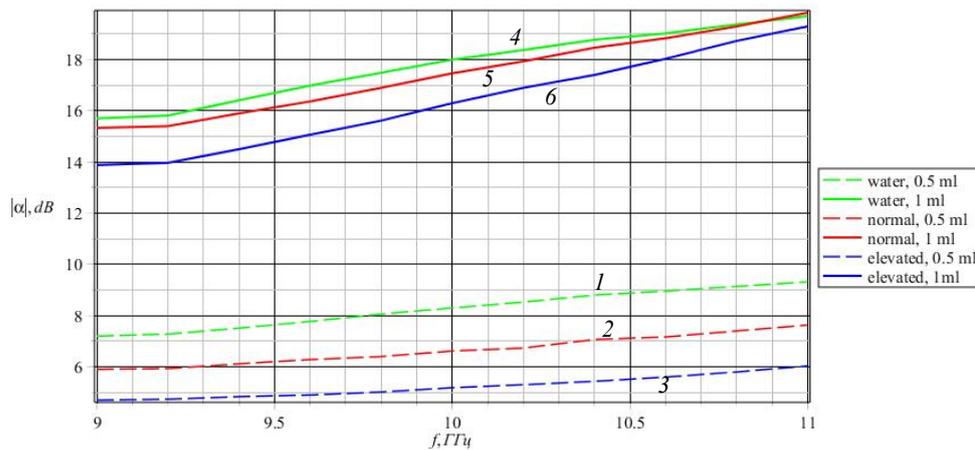


Рис. 7. Дистиллированная вода, уровень глюкозы 5,5 ммоль/л, уровень глюкозы 8,25 ммоль/л для различных объемов вкраплений 0,5 мл (пунктирная линия) и 1 мл (сплошная линия)

Заключение

В данной статье изучена обратная задача дифракции электромагнитной волны на многосекционной диафрагме в прямоугольном волноводе. Рассмотрено решение прямой задачи, а также решение обратной задачи в случае изотропной односекционной диафрагмы для вещественной или комплексной диэлектрической проницаемости. Получены численные результаты обратной задачи. Проведена серия экспериментов, подтверждающая зависимость коэффициента ослабления от уровня глюкозы в жидкости.

Выражаем благодарность профессору Г. С. Макеевой за помощь в работе и обсуждении результатов.

Список литературы

1. **Вайнштейн, Л. А.** Электромагнитные волны / Л. А. Вайнштейн. – М. : Радио и связь, 1988. – 442 с.
2. **Ильинский, А. С.** Математические модели электродинамики / А. С. Ильинский, В. В. Кравцов, А. Г. Свешников. – М. : Высшая школа, 1991. – 224 с.
3. **Медведик, М. Ю.** Обратные задачи восстановления диэлектрической проницаемости неоднородного тела в волноводе : моногр. / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2014. – 76 с.
4. **Smirnov, Yu. G.** Solution to the inverse problem of reconstructing permittivity of an n-sectional diaphragm in a rectangular waveguide / Yu. G. Smirnov, Yu. V. Shestopalov and E. D. Derevyanchuk // Algebra, Geometry and Mathematical Physics, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, Ser. 10533. – 2014. – Vol. 85. – P. 555–567.
5. **Smirnov, Yu. G.** Permittivity reconstruction of layered dielectrics in a rectangular waveguide from the transmission coefficient at different frequencies / Yu. G. Smirnov, Yu. V. Shestopalov and E. D. Derevyanchuk // Inverse Problems and Large-Scale Computations, Series: Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. – 2013. – Vol. 52. – P. 169–181.
6. Изменение диэлектрических характеристик компонент крови больных сахарным диабетом 2 типа / Т. А. Шаталова, А. В. Адельянов, О. А. Горобченко и др. // Биофизический вестник. – 2012. – Т. 1, № 28.
7. **Шишмарев, В. Ю.** Электрорадиоизмерения : учебник / В. Ю. Шишмарев. – М. : Академия, 2004. – 336 р.

References

1. Vaynshteyn L. A. *Elektromagnitnye volny* [Electromagnetic waves]. Moscow: Radio i svyaz', 1988. – 442 p.
2. Il'inskiy A. S., Kravtsov V. V., Svshnikov A. G. *Matematicheskie modeli elektrodinamiki* [Mathematical models of electrodynamics]. Moscow: Vysshaya shkola, 1991. – 224 p.
3. Medvedik M. Yu., Smirnov Yu. G. *Obratnye zadachi vosstanovleniya dielektricheskoy pronitsaemosti neodnorodnogo tela v volnovode: monogr.* [Inverse problems of dielectric permeability of a heterogeneous body in a waveguide: monograph]. Penza: Izd-vo PGU, 2014. – 76 p.
4. Smirnov Yu. G., Shestopalov Yu. V. and Derevyanchuk E. D. *Algebra, Geometry and Mathematical Physics, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, Ser. 10533.* 2014, vol. 85, pp. 555–567.
5. Smirnov Yu. G., Shestopalov Yu. V. and Derevyanchuk E. D. *Inverse Problems and Large-Scale Computations, Series: Springer Proceedings in Mathematics and Statistics.* 2013, vol. 52, pp. 169–181.
6. Shatalova T. A., Adel'yanov A. V., Gorobchenko O. A. et al. *Biofizicheskiy vestnik* [Biophysical bulletin]. 2012, vol. 1, no. 28.
7. Shishmarev V. Yu. *Elektroradioizmereniya: uchebnik* [Electrical radio measurements: textbook]. Moscow: Akademiya, 2004. – 336 p.

Деревянчук Екатерина Дмитриевна
лаборант-исследователь, Научно-исследовательский центр
«Суперкомпьютерное моделирование в электродинамике», Пензенский
государственный университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)
E-mail: mmm@pnzgu.ru

Derevyanchuk Ekaterina Dmitrievna
Researcher-laboratory assistant, Research
Center “Supercomputer modeling
in electrodynamics”, Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Шутков Александр Сергеевич

студент, Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Shutkov Aleksandr Sergeevich

Student, Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

УДК 517.3

Деревянчук, Е. Д.

Математическое моделирование для определения уровня глюкозы в жидкости волноводным методом / Е. Д. Деревянчук, А.С. Шутков // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2016. – № 2 (38). – С. 67–77. DOI 10.21685/2072-3040-2016-2-6